Inhoud

Inleiding 9

1. Getallen 13
2. Algebra 33
3. Meetkunde 49
4. Kansrekening 67
5. Analyse 83
6. Dynamica 99

Epiloog 117
Bibliografie 123



Inleiding

Het doel van dit boekje is de lezers een inleiding te bieden in zes kerngebieden van de moderne wiskunde en te laten zien hoe die ons helpen om onze complexe wereld te begrijpen. We zullen getallen onderzoeken als de toegangspoort tot kwantitatief denken, algebra als de toegangspoort tot abstractie, meetkunde als een manier om verder te kijken dan we kunnen zien, kansrekening als een stuk gereedschap om met exact denken te navigeren in onzekerheid, analyse als een middel om het heel grote of het heel kleine te beteugelen, en dynamica als de wiskunde van verandering. We kunnen natuurlijk niet de gehele wiskunde in zo'n dun boek bespreken. Ons doel is wat basiskennis aan te bieden over sommige van de fundamentele gedachten die ten grondslag liggen aan een groot deel van de discipline. Ik hoop dat ik de essentie van deze onderwerpen in eenvoudige, niet-technische taal kan overbrengen en een inleiding in de wiskunde kan verschaffen die de kracht, de schoonheid en de onderlinge verbanden van haar ideeën toont.

Als kind vond ik wiskunde leuk als abstract spel. Ik zat graag met getallen en symbolen te spelen terwijl ik de kunstmatige problemen en puzzels oploste die ik als huiswerk opkreeg. Ik trainde ook voor wiskundecompetities. Pas veel later ontdekte ik hoezeer de wiskunde

verweven is met de wereld, in het bijzonder met de vooruitgang van de moderne technologie. Ik heb geprobeerd hier het bredere verhaal te vertellen van de ontwikkeling en de groei van de wiskunde door de eeuwen heen, vanaf de oorsprong van vertrouwde begrippen als getallen, meetkundige vormen en verandering, tot de continuïteit tussen deze oude onderwerpen en de moderne praktijk.

Geavanceerde wiskunde heeft de reputatie dat ze schrikwekkend abstract en technisch is, iets wat je het beste aan specialisten kunt overlaten. Hoewel deze reputatie niet geheel onverdiend is, meen ik toch dat het mogelijk is om te beschrijven wat moderne wiskunde is, wat wiskundigen doen, en hoe dat zijn uitwerking heeft in de 'werkelijke wereld', zonder dat ik eerst een hoop ingewikkelde begrippen hoef te definiëren. Ik hoop dat u van dit boek – het resultaat van lange gesprekken met mijn redacteur en uitgever, Thomas Lin – zult genieten en enigszins een indruk krijgt van de fascinerende, millennia oude geschiedenis van de wiskunde, een wetenschap die niet de minste tekenen van vertraging in haar ontwikkeling vertoont!



Getallen

Het verhaal van de getallen is een essentieel onderdeel van de historische ontwikkeling van de wiskunde.

Getallen vormen een van de oudste wiskundige uitvindingen. Ze dateren uit de tijd van de vroege aardbewoners die tienduizenden jaren geleden telden met behulp van inkepingen in dierenbotten. We weten niet wie voor het eerst getallen bedacht, maar we weten dat ze onafhankelijk van elkaar in vele verschillende culturen opkwamen. Ze vormen de toegangspoort tot kwantitatief denken – de eerste stap om niet slechts op gevoel te denken, maar met een soort objectieve standaard om dingen af te meten.

Er is een beroemd verhaal over olijven en de Griekse filosoof Thales van Milete, die ongeveer 600 v. Chr. leefde. Thales was de eerste die een model probeerde op te stellen voor de olijfoogst. Het lukte hem om controle te krijgen over de markt voor olijfpersen vóór de aanvang van een gunstig uitvallend oogstseizoen. Niemand anders had eraan gedacht om in te schatten hoeveel persen er nodig zouden zijn. Met een scherp gevoel voor getallen en zorgvuldige berekeningen verdiende Thales een hoop geld en bewees hij de waarde van de natuurfilosofie.

Natuurlijk zijn veel dingen in de werkelijke wereld te complex om in simpele getallen te vangen. Soms moet je foutbalken, negatieve getallen, vectoren, of zelfs inge-

wikkelder wiskunde gebruiken. Andere terreinen van het leven zijn veel te complex om op de huidige taal van de wiskunde te kunnen vertrouwen. In het algemeen is het bijvoorbeeld geen goed idee om in kwantitatieve termen te denken over een ontluikende romance. Als je getallen probeert toe te kennen aan menselijke relaties wordt dat een ramp. Getallen zijn nuttig gereedschap, maar we moeten begrijpen wanneer we ze kunnen toepassen en wanneer niet.

De meesten van ons komen als kinderen voor het eerst met getallen in aanraking als we blokken of andere concrete voorwerpen tellen. Naarmate de getallen groter worden, kan hun betekenis steeds abstracter lijken, zelfs voor volwassenen. We weten goed wat het betekent om vijf knikkers te hebben, acht druiven, of zeventien klasgenoten, maar we hebben geen aangeboren begrip voor wat een tekort van een biljoen dollar werkelijk betekent (of het verschil tussen een tekort en een schuld). Toch hebben we allemaal een soort intuïtie voor grote abstracte getallen. Misschien hebt u ooit jonge kinderen het spel van de grootste getallen zien spelen; de eerste zal beginnen met honderd, de volgende gaat daaroverheen met duizend, de daaropvolgende met een miljoen, dan een miljard enzovoort. Als de getallen groter worden zal iemand op een zeker moment een onmetelijk groot getal noemen – misschien een googolplex –, waardoor het spel zou stoppen. Dan gebeurt er iets wonderlijks. Eén kind heeft door dat, wat het andere kind ook zegt, ze altijd kunnen antwoorden met dat getal plus één. Dan is het

spel voorbij. Ze hebben iets bewezen dat helemaal niet vanzelfsprekend is: dat, terwijl ieder getal op zichzelf gezien eindig is, de verzameling van getallen als geheel oneindig is. Ik heb gezien dat kinderen zelf dit bewijs uit het ongerijmde spelenderwijs ontdekten, zonder dat er een leraar bij was.

Het is heel natuurlijk om je af te vragen of oneindig een getal is. De standaard getallensystemen – inclusief de natuurlijke getallen (de getallen waarmee we tellen), de gehele getallen (de natuurlijke getallen en hun negatieve tegenhangers plus nul), de rationale getallen (alle gehele getallen en de breuken), en de reële getallen (alle getallen op de getallenlijn, inclusief de irrationale getallen zoals π en $\sqrt{2}$ – bevatten oneindig niet. Maar soms is het nuttig om deze normale systemen uit te breiden met oneindig. Stel je voor dat je op een plat vlak staat en naar de horizon kijkt. Die is oneindig ver weg en maakt technisch gesproken geen deel uit van het vlak. Als je het vlak vergroot en de grens die oneindig representeert, erbij insluit, kun je je voorstellen wat er gebeurt als iets bij jou vandaan schiet en een punt op de horizon nadert, zelfs al bereikt het dat punt nooit. Op die manier kun je oneindig opvatten als een geïdealiseerde benadering van extreem grote getallen. Dat is een effectieve techniek in de calculus,* maar

* In het verleden werd het Engelse woord 'calculus' meestal vertaald als 'differentiaal- en integraalrekening' of als 'infinitesimaalrekening'. Recentelijk is echter ook in Nederland het woord 'calculus' meer ingeburgerd geraakt en wij zullen dat gebruik in deze vertaling volgen. *Noot van de vertaler.*

die heeft zijn prijs. De prijs die je betaalt is dat je sommige rekenkundige wetten kwijtraakt. In een standaard getallensysteem is x minus x bijvoorbeeld altijd gelijk aan nul. Als je oneindig eenmaal toelaat is het niet veilig om dat verschil nul te noemen (wat is oneindig min oneindig?).

Wiskundigen hebben geleerd om heel zorgvuldig met oneindig om te gaan. Maar het is heel handig. Het kan veel bewijzen korter maken.* In de praktijk kun je vaak oneindigheden gebruiken om een interessant probleem op te lossen waar alleen eindige getallen in optreden. Jaren later kunnen andere wiskundigen de redenering 'eindig maken' en al die oneindigheden door extreem grote getallen vervangen. Dat werkt niet altijd, maar vaak kun je een manier vinden om het om te zetten in een eindig bewijs. Dus zelfs al sta je wantrouwig tegenover oneindig, je kunt het gebruiken als een tijdelijk soort cheatcode om te zien hoe de redenering in zijn werk gaat. Dan kun je later altijd nog proberen om het te verwijderen, hoewel dat de bewijzen vaak veel ingewikkelder maakt.

Net zoals de Engelse wiskundige John Wallis in 1657 het symbool ∞ uitvond voor oneindig, heeft men de hele geschiedenis door verschillende manieren geïntroduceerd om getallen weer te geven. We hebben het decimale systeem, wat tegenwoordig de gebruikelijke manier

---

* Beoefenaars van de mathematische fysica houden bijvoorbeeld erg van iets dat ze de deltafunctie noemen. Dat is een geïdealiseerde piek van infinitesimale breedte en oneindige hoogte, waarmee ze kunnen uitdrukken wat er op één specifiek moment in de tijd gebeurt.

is om getallen te onderwijzen. Maar we hoeven 10 niet als grondtal te gebruiken. We kunnen grondtal 2 (binair) gebruiken, grondtal 16 (hexadecimaal), of elk grondtal dat in onze behoefte voorziet.* In de Middeleeuwen gebruikten Europese kooplieden bij hun zaken vaak de grondtallen 12 en 20. Restanten daarvan kun je nog zien in de woorden 'dozijn' en 'gros'. De Babyloniërs gebruikten grondtal 60. Vandaar dat wij nog steeds 60 minuten en 60 seconden in onze tijd- en hoekmeting kennen. De oude Romeinen hadden het systeem van Romeinse cijfers, een telsysteem waarin ze de letters I, V, X, C, D, en M gebruikten voor 1, 5, 10, 100, 500 en 1000. De oude Grieken gebruikten het Griekse alfabet om getallen weer te geven. Daarin was alfa gelijk aan 1, bèta gelijk aan 2, enzovoort. Het alfabet gebruiken om zowel woorden als getallen mee weer te geven was echter verwarrend. Ieders naam duidde ook een getal aan, waardoor mensen begonnen te denken dat het iets speciaals betekende. Dat had de pseudowetenschap der numerologie als ongelukkig resultaat.

Getallen en de manier waarop we ze representeren, kunnen een spanning tussen gemak en contradictie blootleggen. Ondanks hun naam – en de hardnekkigheid van leraren over de hele wereld – bestaan reële getallen niet werkelijk in de fysische wereld. We kunnen niets met de oneindige nauwkeurigheid van reële getallen meten. Daarom zijn 1,000… en 0,9999… dezelfde getallen. Als

---

* Het binaire systeem is bijzonder snel en praktisch voor elektronische computers.